R. Krell (www.r-krell.de), 17. Januar 2018

Hinweise zum richtigen Vorgehen beim Testen von Hypothesen

Auch in Schulbüchern (und leider immer wieder auch in Zentralabitur-Aufgaben) wird oft nicht klar, warum die Nullhypothese H_0 abgelehnt werden soll, um die gegenteilige Vermutung H_1 zu beweisen. Warum wird nicht einfach H_1 angenommen? Auch bleibt vielfach offen, ob zuerst H_1 oder H_0 da ist bzw. aufgestellt werden muss.

Dazu kurz Folgendes:

- Bekanntlich hat die Ablehnung eine höhere Beweiskraft als die Annahme: Ein Gegenbeispiel reicht zum Widerlegen einer Behauptung; viele passende Beispiele können aber eine Behauptung (oder hier: eine Vermutung H_1) nicht beweisen. Das Ergebnis einer Stichproben-Untersuchung ist wie ein Beispiel.
- Deshalb wird – wie beim indirekten Beweis – zur ursprünglichen Vermutung (H_1) die Gegenhypothese H_0 aufgestellt, um letztere zu widerlegen. Und weil H_0 als Gegenteil von H_1 konstruiert wurde, ist – wenn H_0 falsch ist – automatisch H_1 richtig (wie erhofft).
- H_1 kommt also immer zuerst, dann wird H_0 als Gegenteil dazu konstruiert.
- Beisp. 1: Wird ein neues Medikament hergestellt, hofft man natürlich, dass es besser ist als das Standardmedikament (sonst bräuchte man kein neues. Die Behandlung mit einem bewusst schlechteren Medikament wäre unethisch). Der Anteil p der Geheilten soll mit dem neuen Medikament also höher sein als bisher (alte Heilungsrate p_0), d.h. H_1: $p > p_0$. Gegenhypothese = Nullhypothese H_0: $p \leq p_0$. Jetzt versucht man H_0 abzulehnen, d.h. hofft, in der Stichprobe eine große Anzahl X von Geheilten zu finden: $X > k$ (rechtsseitiger Test: Ablehnungsbereich liegt rechts vom kritischen Wert *k*, d.h. bei großen Werten von X. Ordnungszeichen zwischen X und *k* immer umgekehrt wie zwischen p und p_0 in H_0!). Damit die hohe Heilungsrate aber auf das Medikament zurück geführt werden kann, muss die Rolle des Zufalls für das Stichprobenergebnis begrenzt werden auf $P(X > k) \leq \alpha$ bzw. $1 - P(X \leq k) \leq \alpha$ oder $P(X \leq k) \geq 1 - \alpha$. So erhält man *k* und damit den kritischen Bereich bzw. Ablehnungs- oder Verwerfungsbereich *k*+1 .. n als Entscheidungsregel gegen H_0 (und damit indirekt für H_1) (α ist dabei die Irrtumswahrscheinlichkeit bzw. das maximale Risiko 1. Art, also die Wkt. dafür, dass eine eigentlich richtige Nullhypothese H_0 durch den zufällig nicht-repräsentativen Ausfall einer Stichprobe zu Unrecht abgelehnt und damit H_1 irrtümlich bestätigt wird).
- Beisp. 2: Vermutung: ‚Das Vertrauen in die Politik schwindet', d.h. H_1: $p < p_0$ (wobei p_0 wieder angibt, wie groß der Anteil der den Politikern vertrauenden Personen früher war). Gegen- bzw. Nullhypothese H_0: $p \geq p_0$. Widerlegung durch wenige Politikvertrauende in der Stichprobe, $X <= k$. Die Rolle des Zufalls an der Erfüllung der letzten Ungleichung sei klein (damit das Ergebnis für einen echten Trend in der Bevölkerung spricht) mit $P(X \leq k) \leq \alpha$. Das gefundene *k* führt zur Entscheidungsregel bzw. dem Ablehnungsbereich für H_0 bei 0 .. *k* Politikzufriedenen in der Stichprobe vom Umfang *n*.
- Weitere Beispiele etwa auch in meiner 4. Klausur im Mathe-Lk Q1, ‚k4m12(q1)m-16a.pdf' (auf http://www.r-krell.de/m-klausuren.htm)
- **Wichtig: Liegt das Stichprobenergebnis nicht im Ablehnungsbereich von H_0, *weiß man nichts*: H_0 kann ebenso wie H_1 richtig sein (das Ergebnis ist mit beiden verträglich, beweist aber nicht deren Richtigkeit) -- man weiß es nicht und muss weitere/genauere Untersuchungen anstellen/abwarten**. (Die meisten neueren Physik-Hypothesen sind in diesem unentscheidbaren Zustand)
- Ein Beispiel, in dem versucht wird, zwei unvereinbare Hypothesen anzunehmen (statt richtig jeweils deren Gegenteil abzulehnen), findet sich auf den Seiten 8 bis 12 in meiner pdf-Datei „stoch_s2.pdf" (unter http://www.r-krell.de/m.htm#Stochastik). Dort gibt es (auf Seite 14f) auch eine weitere Klausuraufgabe zum Testen
- Achtung: fällt bei einer Untersuchung/Stichprobe irgend etwas auf, darf man nicht (wie leider noch häufig in Psychologie und Medizin gemacht) nachträglich eine passende Hypothese (mit geeignetem α) formulieren und die gefundenen Ergebnisse als signifikant verkaufen. Vielmehr kann zwar die Auffälligkeit Anlass für eine Vermutung H_1 sein. Ein passendes H_0 muss dann aber **an einer *neuen* Stichprobe** mit vorher vernünftig festgelegtem α getestet werden -- sonst findet man immer irgend etwas!